Suite définie par une sommation

Énoncé

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

1. À l'aide d'un outil adapté, calculer les 500 premiers termes de la suite (v_n).
   Quelle conjecture peut-on faire concernant la convergence de cette suite ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des calculs et de la conjecture.

   ☞ *La conjecture attendue est : (v_n) est convergente.*
   Sur tableur, différentes stratégies sont possibles pour le calcul des termes. On n'attend pas nécessairement de l'élève l'utilisation d'une formule directe de sommation. Le calcul peut être décomposé en calculant au préalable les différentes valeurs de $\frac{1}{n^2}$. On donnera des indications en ce sens à un élève en difficulté sur cette question.

2. Rechercher, dans les deux cas suivants, à l'aide de l'outil choisi, un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :
   (a) $v_{n+1} - v_n \leqslant 10^{-3}$;
   (b) $v_{n+1} - v_n \leqslant 10^{-5}$.

   Comment interpréter ces résultats au regard de la conjecture émise à la question 1 ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des résultats et de l'interprétation.

   ☞ *Au préalable, un élève peut conjecturer que cette différence est positive et décroît.*
   Les réponses attendues sont 31 au (a) et 316 au (b). En cas d'erreur faire vérifier au candidat que les formules utilisées pour le calcul de $v_{n+1} - v_n$ sont bien cohérentes avec l'indice n correspondant.
   On attend de l'élève qu'il vérifie la cohérence des ces résultats avec la conjecture émise à la question 1 : la convergence de (v_n) entraîne que la différence $v_{n+1} - v_n$ tend vers 0.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose $x_n = v_n + \frac{1}{n}$.
   À l'aide de l'outil choisi, calculer les 500 premiers termes de la suite (x_n) puis représenter graphiquement les suites (v_n) et (x_n).
   Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de ces deux suites ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des calculs et de la conjecture et pour proposer une démarche pour la question 4.

☞ *La réponse attendue est : (v_n) et (x_n) sont adjacentes.*
On pourra donner des indications techniques permettant d'obtenir la représentation graphique à un élève en difficulté sur cette question.

4. (a) Démontrer la conjecture émise à la question 3.
   (b) Conclure sur la convergence de la suite (v_n).

☞ *On attend du candidat qu'il justifie le sens de variation de suites (x_n) et (v_n) ainsi que la convergence vers 0 de la différence $x_n - v_n$ et qu'il cite le théorème de convergence des suites adjacentes.*
On pourra demander à un candidat ayant terminé en avance de donner un encadrement de la limite (valeur exacte $\frac{\pi^2}{6}$) d'amplitude 10^{-2}.

Production demandée

- Obtention des 500 premières valeurs des suites (v_n) et (x_n), ainsi que la représentation graphique de ces valeurs.
- Obtention des valeurs de n_0 à la question 2.
- Réponses argumentées pour la question 4.

Compétences évaluées

- Émettre des conjectures.
- Démontrer des inégalités.
- Résoudre une inéquation.

Suite définie par une sommation

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable de représenter la situation : il obtient sur tableur ou sur calculatrice les premiers termes de la suite (v_n). *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
L'élève utilise de façon pertinente la calculatrice ou le tableur. *Il est capable d'expérimenter, de faire des essais. Il est capable d'émettre une conjecture en cohérence avec ses observations.* *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Suite à un éventuel questionnement oral, l'élève est capable d'affiner ses explorations et de mener les calculs à leur terme en utilisant pertinemment les TICE. *Il fait preuve d'esprit critique avec un retour éventuel sur ses conjectures.*	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir faire mathématiques sur le sujet : démontrer une inégalité, résoudre une inéquation...	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice et il est capable d'émettre un retour critique sur ses observations.	

Remarques complémentaires :