Distance minimale d'un point à une courbe

Énoncé

Dans un repère orthonormal d'origine O, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction logarithme népérien.
On s'intéresse à la distance OM lorsque M parcourt $\mathscr{C}$. Le but de l'exercice est de préciser si cette distance peut être rendue minimale et de caractériser le ou les point(s) M, s'il en existe, situé(s) sur $\mathscr{C}$ et rendant cette distance minimale.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure permettant d'explorer cette situation.
2. Cette distance semble-t-elle minimale pour un (ou plusieurs) point(s) particulier(s) de $\mathscr{C}$? Si oui donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette plus petite distance et de l'abscisse de ce(s) point(s).

Appeler le professeur pour une vérification de la figure construite et des conjectures émises.

☞ *Ne pas hésiter à donner à l'élève toutes les aides logicielles dont il ou elle aurait besoin pour réaliser ce qu'il ou elle a prévu de lui-même (elle-même). Par exemple, comment :*
- *construire un point libre sur une courbe ;*
- *obtenir l'affichage d'une distance ;*
- *modifier la précision d'une affichage ;*
- *affiner un pas de pilotage.*

3. Tracer la droite (OM) ainsi que la tangente en M à la courbe $\mathscr{C}$. Que semble-t-il se passer lorsque M est positionné sur la courbe $\mathscr{C}$ de sorte que la distance OM soit minimale ?

Appeler le professeur pour une vérification de la conjecture.

☞ *On tiendra compte du fait que certains logiciels ne permettent pas facilement de tracer des tangentes et obligent à des manipulations plus longues d'équations de droites.*

Partie B

4. Quelle relation doit vérifier l'abcisse x_0 d'un point M_0 en lequel la distance OM est minimale ?

Appeler le professeur pour lui présenter la méthode envisagée et une vérification de la relation éventuellement obtenue.

☞ *On valorisera la modélisation de la situation par une fonction f ; dans cette optique, on appréciera certains arguments d'ordre graphique comme une représentation de la fonction dérivée de f qui aident à se convaincre de l'existence de M_0, et on fournira des aides dans ce sens si nécessaire.*
Au besoin, signaler à l'élève qu'il n'est pas utile de chercher à calculer x_0.

5. Prouver la conjecture élaborée dans la question 3.

Production demandée

– Les différentes étapes des stratégies prévues pour répondre aux questions 4. et 5.
– La mise en forme de l'une de ces étapes.

Compétences évaluées

– Tracer une courbe et la tangente en un point mobile de cette courbe.
– Coefficient directeur de la tangente en un point d'une courbe.
– Étude des variations d'une fonction.
– Condition d'orthogonalité de deux vecteurs.

Distance minimale d'un point à une courbe

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable, avec une aide technique éventuelle, d'effectuer toutes les constructions demandées, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.	
En exploitant les fonctionnalités du logiciel, avec une aide technique éventuelle, L'élève est capable de proposer des conjectures pour les questions 2 et 3.	
L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral ; ces indications peuvent être des aides logicielles nécessaires pour réaliser ce qu'il a prévu.	
L'élève est capable de concevoir une démarche pour établir une relation vérifiée par x_0.	
L'élève est capable d'obtenir une relation vérifiée par x_0.	
L'élève est capable de concevoir une démarche pour exprimer analytiquement l'orthogonalité de la droite (OM_0) et de la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$.	
L'élève est capable de mettre en œuvre cette dernière démarche.	

Remarques complémentaires :