

Intersection de tangentes

Énoncé

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbf{R} par :

$$f(x) = \frac{e^{1+x} + e^{1-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2}$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f et \mathcal{C}_g la courbe représentative de g .

Pour tout réel a , on note :

- A le point de \mathcal{C}_f d'abscisse a et T_A la tangente à \mathcal{C}_f au point A,
- B le point de \mathcal{C}_g d'abscisse a et T_B la tangente à \mathcal{C}_g au point B,
- M (x_M ; y_M) le point d'intersection des tangentes T_A et T_B .

On souhaite étudier le lieu géométrique \mathcal{E} du point M lorsque a varie dans \mathbf{R} .

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

- (a) Construire les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ainsi que les tangentes T_A et T_B .

☞ On prendra en considération le fait que certains logiciels ne permettent pas facilement de tracer des tangentes, et obligent à des manipulations plus longues d'équations de droite.

- (b) Construire le point M.

Appeler l'examineur pour valider la figure, ou en cas de difficultés.

- (c) En observant la situation obtenue avec plusieurs valeurs de a , dire quelle relation semble exister entre les réels a et x_M .

Appeler l'examineur pour valider la conjecture.

☞ Il peut être commode de faire «afficher» les nombres a et x_M (et, s'il le faut vraiment, leur différence).

2. Tracer le lieu \mathcal{L} du point M. Ce point semble appartenir à la courbe représentative \mathcal{E} d'une fonction connue, quelle est cette fonction ? Comment peut-on vérifier cette conjecture ?

Appeler l'examineur pour valider la conjecture.

Partie B

3. Démontrer que \mathcal{L} fait effectivement partie de \mathcal{E} . Que dire de plus ?

☞ Il s'agira essentiellement de procéder au changement de variable défini par $x = a + 1$ pour faire apparaître la bonne réponse. La réciproque n'est pas explicitement demandée, mais un candidat s'interrogeant sur l'inclusion contraire, voire la justifiant, devrait certainement être valorisé.

☞ Un logiciel de calcul formel permet aussi de répondre à cette question, mais il s'agit là d'une utilisation quelque peu experte qui n'est pas attendue de la part de l'élève.

Production demandée

- Courbes demandées aux questions 1 et 2.
 - Réponse à la question 3.
-

Compétences évaluées

- Tracer la courbe représentative d'une fonction et sa tangente en un point donné.
 - Utiliser l'aspect dynamique pour faire des conjectures.
 - Mettre en place un protocole pour reconnaître le lieu géométrique d'un point.
 - Déterminer une équation d'une tangente à la courbe représentative d'une fonction.
 - Résoudre un système linéaire.
-

Intersection de tangentes

Nom:**Prénom:****Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.
- La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.
- La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examineur sera globalement pris en compte de façon substantielle.

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maîtrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

<i>Compétences évaluées</i>	<i>Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examineur)</i>
<i>L'élève est capable, avec une aide technique éventuelle, de construire les courbes, les tangentes, le point M et le lieu de M.</i>	
<i>En exploitant les fonctionnalités du logiciel, avec une aide technique éventuelle, l'élève est capable d'émettre une conjecture quant à la relation entre a et x_M et quant à la fonction représentée par \mathcal{E}.</i>	
<i>L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral ; ces indications peuvent être des aides logicielles nécessaires pour réaliser ce qu'il a prévu.</i>	
<i>L'élève est capable de concevoir une démarche pour vérifier que \mathcal{L} est inclus dans \mathcal{E}.</i>	
<i>L'élève est capable de démontrer que \mathcal{L} est inclus dans \mathcal{E}.</i>	
<i>L'élève conçoit le problème de la réciproque et, éventuellement, le résout.</i>	

Remarques complémentaires :