

## Une propriété des diviseurs de certains entiers

### Énoncé

On dit qu'un entier naturel non nul  $N$  est *en division harmonique* si le quotient du nombre de diviseurs de  $N$  par la somme des inverses des diviseurs de  $N$  est un entier (c'est-à-dire, que le nombre des diviseurs est un multiple de la somme des inverses des diviseurs).

Par exemple :

- 6 admet 4 diviseurs qui sont 1 ; 2 ; 3 et 6 ;
- la somme des inverses des diviseurs de 6 vaut :  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$  ;
- le quotient  $\frac{4}{2} = 2$  est un entier ;
- 6 est donc en division harmonique.

### Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, dire si les nombres 32 et 140 sont en division harmonique.

Appeler l'examineur pour vérification.

☞ *L'emploi d'un logiciel de calcul formel, avec des fonctions arithmétiques, permet de répondre facilement à cette question. On s'assurera alors que le candidat connaît toutes les fonctions utiles pour la suite.*

☞ *L'emploi d'un tableur ou d'un logiciel de calcul numérique demande plus de travail. On attirera l'attention du candidat sur les erreurs d'arrondis du tableur.*

2. Pour tout entier  $n$  non nul on pose  $q_n = 2^{n+1} - 1$  et  $\alpha_n = 2^n q_n$ .

- (a) Déterminer à l'aide du logiciel les quatre (ou cinq si possible) premières valeurs de  $n$  pour lesquelles  $q_n$  est un nombre premier.

☞ *L'utilisation d'un logiciel de calcul formel facilite nettement le travail dans cette question, mais aussi dans la suite. Cependant les méthodes peuvent être différentes suivant le logiciel choisi. On veillera à ce que le candidat dispose de toutes les informations utiles concernant les manipulations de listes de nombres (somme, nombre d'éléments. . .) en fonction du logiciel choisi.*

☞ *Le choix du tableur pour trouver la cinquième valeur de  $n$  peut s'envisager en utilisant des propriétés du cours sur les tests de primalité d'un entier :*

- critères de divisibilité ;
- $n$  est premier si l'entier 1 est le seul diviseur de  $n$  inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$  ;
- . . .

*On pourra limiter le candidat à la recherche des quatre premières valeurs de  $n$  et lui demander simplement d'exposer une méthode utilisant ces propriétés pour de plus grandes valeurs.*

- (b) Pour chacune des valeurs trouvées, calculer le nombre de diviseurs de  $\alpha_n$  et la somme des inverses des diviseurs de  $\alpha_n$ . Que peut-on conjecturer ?

Appeler l'examineur pour vérification des valeurs et présentation de la conjecture.

☞ *Suivant le choix du logiciel de calcul formel, le calcul de la somme des inverses des diviseurs est plus ou moins simple. Il sera probablement utile de donner des indications utiles pour ces opérations.*

☞ *L'utilisation d'un tableur ne pose pas de problème si on se limite aux quatre premières valeurs de  $n$ . Cependant, on s'assurera que le candidat a conscience de la nature des résultats numériques obtenus.*

### Partie B

3. Soit  $p$  un nombre premier.  
Montrer que  $p$  n'est pas en division harmonique.
4. On suppose que  $q_n = 2^{n+1} - 1$  est premier.
- (a) Donner la liste des diviseurs de  $\alpha_n$  en fonction de  $q_n$ .
  - (b) Que peut-on conclure si la somme des inverses des diviseurs de  $\alpha_n$  vaut 2 ?
  - (c) Montrer que la situation précédente est vérifiée.
- 

### Production demandée

- Questions 3 et 4.
- 

### Compétences évaluées

- Utiliser un logiciel adapté à des opérations arithmétiques simples portant sur des entiers ;
  - Savoir trouver l'ensemble des diviseurs d'un entier décomposé en facteurs premiers ;
  - Connaître les résultats élémentaires concernant les suites géométriques.
-

## Une propriété des diviseurs de certains entiers

**Nom:****Prénom:****Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examineur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maîtrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

<i>Compétences évaluées</i>	<i>Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examineur)</i>
<i>Le candidat est capable de tester la primalité d'un nombre à l'aide d'outils logiciels.</i>	
<i>Le candidat est capable de tenir compte des problèmes d'approximation dans les calculs réalisés par un logiciel.</i>	
<i>Le candidat est capable, avec une aide éventuelle, d'utiliser des fonctions avancées dans un logiciel : tests, manipulation de données, ...</i>	
<i>Le candidat est capable d'émettre des conjectures à partir des résultats observés.</i>	
<i>Le candidat tire profit des indications éventuellement données à l'oral.</i>	
<i>Le candidat montre un certain nombre de connaissances mathématique sur le sujet : nombres premiers, tests de primalité, somme des termes d'une suite géométrique. . .</i>	
<i>Le candidat propose une résolution correcte de l'exercice, en tirant profit des résultats observés.</i>	

**Remarques complémentaires :**