

Étude d'un ensemble de points

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ qui permet une assimilation à l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le nombre complexe $f(z) = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

On pose $a_0 = 4 + 2i$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, et on note A_n le point d'affixe a_n dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, calculer a_n pour n variant de 1 à 30.

 Différents types de logiciels sont utilisables : logiciel de calcul numérique ou formel, tableur grapheur, opérant avec des complexes.

 L'examineur doit s'assurer que l'élève connaît les procédures logicielles pour mettre en oeuvre une relation de récurrence et pour représenter le nuage de points obtenu. En cas de difficultés ne pas hésiter à donner l'aide nécessaire.

- (b) Représenter le nuage des points A_n pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?

Appeler l'examineur pour lui présenter les calculs et le graphique réalisés.

 On attend que l'élève observe l'enroulement du nuage autour du point J d'affixe i , et qu'il émette une première conjecture concernant la suite des distances JA_n . Pour conjecturer le «point limite», l'examineur pourra suggérer d'observer les affixes des points A_n .

2. Soit J le point d'affixe i . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = JA_n$.

- (a) Calculer d_n pour n variant de 1 à 30.
 (b) Représenter le nuage des points de coordonnées (n, d_n) pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?
 (c) Conjecturer la nature de la suite (d_n) .

Appeler l'examineur pour lui présenter le travail réalisé.
Lui proposer des conjectures relatives à la suite (d_n) .

 L'examineur contrôlera que l'élève sait exprimer la distance de deux points en fonction de leurs affixes et qu'il connaît les procédures logicielles pour effectuer les calculs et la représentation graphique. Il pourra éventuellement suggérer d'ouvrir une deuxième fenêtre graphique.

☞ Les résultats numériques ou graphiques obtenus sont à rapprocher des observations faites à partir du premier graphique.

☞ L'élève doit mettre en oeuvre une procédure de calcul pour conjecturer que la suite (d_n) est géométrique. Dans l'énoncé de cette conjecture, selon l'outil utilisé, on n'exige pas la valeur exacte de la raison.

Partie B

3. (a) Soit S la transformation du plan, d'écriture complexe $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
Préciser la nature de S et déterminer ses éléments géométriques caractéristiques.
- (b) Déterminer la nature de la suite (d_n) . Étudier sa convergence.
- (c) Interpréter les observations faites sur les points A_n représentés dans la question 1.(b).

☞ Il s'agit essentiellement de déterminer le centre et le rapport de la similitude en vue d'établir la nature et la convergence de la suite (d_n) . Toute démarche cohérente est acceptée, y compris la mise en oeuvre de fonctionnalités d'un logiciel de calcul formel.

☞ On attend que l'élève confronte le résultat obtenu avec les différentes conjectures émises.

Production demandée

- Affichage à l'écran des calculs et du graphique.
- Réponses argumentées pour la question 3.

Compétences évaluées

- Utiliser un logiciel pour effectuer des calculs dans \mathbb{C} .
- Représenter graphiquement un nuage de points.
- Utiliser des similitudes du plan.
- Obtenir une liste de plusieurs termes d'une suite, et reconnaître le type de cette suite.

Étude d'un ensemble de points

Nom:**Prénom:****Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examineur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maîtrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

<i>Compétences évaluées</i>	<i>Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examineur)</i>
<i>L'élève est capable de représenter la situation à l'aide du logiciel : calcul des termes successifs de la suite (a_n) et représentation graphique du nuage de points. Il ou elle est capable d'émettre des conjectures en cohérence avec les résultats obtenus.</i>	
<i>L'élève est capable d'élaborer et de mettre en oeuvre une démarche logique pour définir les termes de la suite (d_n) et pour conjecturer la nature de cette suite.</i>	
<i>L'élève tire profit des indications données à l'oral : ces indications peuvent être des aides logicielles nécessaires pour réaliser ce qu'il ou elle a prévu.</i>	
<i>L'élève fait preuve de connaissances, de savoir-faire sur le sujet : suites récurrentes, suites géométriques, affixes des points, similitudes.</i>	
<i>L'élève propose une résolution correcte de l'exercice et est capable de faire un retour critique sur ses observations.</i>	

Remarques complémentaires :