Divisibilité par 2, 3, 7 et 13 de certains entiers naturels

Énoncé

Pour tout entier naturel n non nul, on considère le nombre U_n défini par :

$$U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}.$$

On cherche à déterminer si ce nombre peut être divisible par l'un ou plusieurs des nombres premiers suivants : 2 ; 3 ; 7 et 13.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, calculer $U_1, U_2, \cdots, U_{30}$.

   ☞ *En cas de besoin on questionnera le candidat qui utilise mal la syntaxe du logiciel, sur les fonctionnalités dont il ou elle a besoin et on lui indiquera l'aide du logiciel.*

   ☞ *Pour la question suivante l'élève pourrait utiliser une commande du type* `MOD( ; )` *pour déterminer le reste d'une division euclidienne.*

2. Déterminer les listes des restes de la division de U_n par 2 ; par 3 ; par 7 et par 13.

   (a) Quelles conjectures peut-on en tirer ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

   (b) À quelle(s) condition(s) sur n, le nombre U_n semble-t-il être divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

   ☞ *L'examinateur aiguillera l'élève qui ne songe pas à donner des critères de divisibilité de U_n par 2, 7 et 13, selon les valeurs de n, vers la problématique du sujet.*

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

Partie B

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, U_n est divisible par 7 si, et seulement si, 7 divise $3^n - 1$.

   Appeler l'examinateur pour vérification

   ☞ *L'examinateur pourra amener le candidat à reconnaitre U_n comme la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.*

☞ *L'examinateur pourra demander au candidat d'énoncer le théorème de Gauss avant qu'il débute la démonstration de la réciproque.*

4. À l'aide de la question précédente, démontrer la conjecture émise pour 7.
5. Dans le cas où U_n est divisible par 7, U_n est-il divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

☞ *Dans cette question seule une démarche pour la démonstration est demandée.*

Production demandée

– Les différentes conjectures.
– La démonstration de la question 4 .

Compétences évaluées

– Savoir utiliser un tableur.
– Émettre des conjectures.
– Savoir utiliser le théorème de Gauss.

Divisibilité par 2, 3, 7 et 13 de certains entiers naturels

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable d'utiliser un tableur ou un logiciel de calcul numérique, avec une aide éventuelle, pour le calcul des termes U_n *et les restes des divisions euclidiennes. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
L'élève est capable de faire des conjectures à partir de ses résultats. *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral, par exemple pour donner la forme de l'entier n pour que 7 divise* U_n*.*	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : divisibilité (congruence), somme des termes consécutifs d'une géométrique, utilisation du théorème de Gauss.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :