

Un ensemble de points du plan construit à l'aide de deux suites

Énoncé

On construit deux suites (x_n) et (y_n) de la manière suivante :

Initialisation : $x_0 = 10, y_0 = 0$

Récurrence : pour tout entier naturel n ,
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2 - \sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point M_n de coordonnées (x_n, y_n) . L'objectif est d'observer et d'étudier le nuage des points M_n obtenus, à l'aide d'un logiciel adapté.

☞ La plupart des logiciels de géométrie dynamique ne permettent pas d'obtenir de façon simple les suites (x_n) et (y_n) . C'est pourquoi on peut encourager l'usage d'un tableur ou d'un système permettant la définition de ces suites et la représentations des points (ce qui est le cas de certains logiciels de calcul formel). Attention cependant, les représentations graphiques obtenues avec un tableur ne sont pas orthonormales, à moins d'ajuster manuellement la taille des axes.

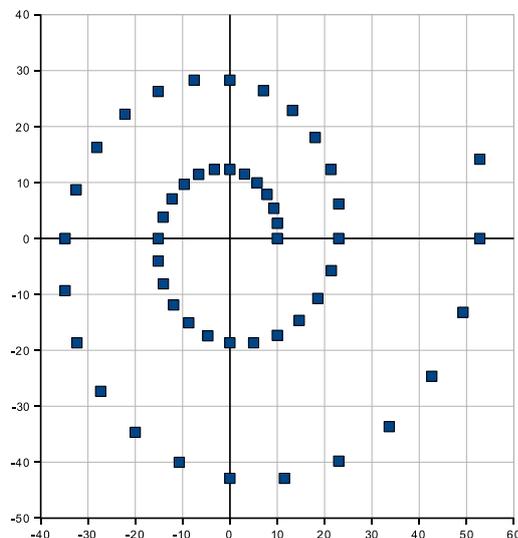
Partie A

- Placer dans un repère orthonormal adapté les points M_k pour k compris entre 0 et 30.

Appeler l'examineur pour qu'il vérifie la figure.

- Une transformation du plan envoie M_0 sur M_1 , M_1 sur M_2 et en général M_k sur M_{k+1} . Formuler une conjecture relative à la nature de cette transformation. En admettant que cette conjecture est vérifiée, essayer de préciser **au moins deux** des caractéristiques de cette transformation à partir de la figure affichée.

Appeler l'examineur pour lui proposer la conjecture et certains détails concernant cette transformation.



☞ On se satisfera, pour commencer, de la notion de similitude directe de centre O . L'angle de la similitude est un peu plus délicat à trouver mais on peut quand même le deviner au moyen du logiciel en notant que x_6 est nul (ou que y_{12} l'est), ce qui amène à penser que l'angle vaut $\frac{\pi}{12}$. On pourra, le cas échéant, faire afficher les demi-droites $[OM_1)$ et $[OM_2)$. Insistons ici sur la logique sous-jacente : **s'il est vrai** que la transformation est une similitude directe de centre O , **alors** son angle doit être $\frac{\pi}{12}$. Le rapport de la similitude vient par le calcul de $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, et peut être mis sous la forme $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$; l'écriture précise de ce nombre peut revêtir différents aspects tous acceptables a priori.

Partie B

3. On note z_n l'affixe du point M_n .

En établissant une relation entre z_{n+1} et z_n de la forme $z_{n+1} = a \cdot z_n$, démontrer les conjectures précédentes. On pourra chercher le module et l'argument de a^2 .

☞ Il s'agit de trouver le module et l'argument du multiplicateur de la similitude $f(z) = az$. On conseille en fait à la candidate ou au candidat de s'intéresser à $f \circ f$ qui est plus simple que f . L'argument de a^2 est celui de $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, soit $\frac{\pi}{6}$.

Production demandée

- Réalisation de la figure demandée à l'aide du logiciel.
- Démonstration des conjectures relatives à la transformation.

Compétences évaluées

- Représenter des points, donnés par leur coordonnées, à l'aide d'un logiciel de géométrie, d'un tableur ou de tout autre logiciel adapté.
- Déterminer des éléments caractéristiques d'une similitude plane directe.
- Mener des calculs algébriques sur les nombres complexes.

Un ensemble de points du plan construit à l'aide de deux suites

Nom:**Prénom:****Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examineur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maîtrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

<i>Compétences évaluées</i>	<i>Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examineur)</i>
<i>Le candidat est capable d'obtenir une figure correcte. Il ne s'agit pas ici de juger de l'efficacité du processus de construction qui dépend fortement du logiciel employé (ou des combinaisons de logiciels : par exemple calculatrice pour calculer une valeur approchée des coordonnées et logiciel de géométrie pour faire afficher les points).</i>	
<i>Le candidat reconnaît une similitude (on appréciera son degré d'autonomie).</i>	
<i>Le candidat a su utiliser les ressources disponibles pour rechercher des caractéristiques de la similitude, le centre en premier lieu, puis l'angle ou le rapport (on appréciera la précision des réponses fournies).</i>	
<i>Le candidat a su prévoir les diverses étapes qui seront nécessaires à la démonstration de sa conjecture.</i>	
<i>Le candidat a su conduire les calculs et a su réaliser la démonstration attendue.</i>	

Remarques complémentaires :