Suites et fonctions

Énoncé

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 1$. On considère les fonctions f_n définies sur $[0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}}{n} - 1 + x\mathrm{e}^{1-x}$$

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, conjecturer, suivant les valeurs de n :
   (a) les variations de f_n.
   (b) le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$.
2. On note α_n et β_n les deux solutions, lorsqu'elles existent, de l'équation $f_n(x) = 0$ telles que $\alpha_n < \beta_n$.
   (a) Conjecturer, pour tout $x \geqslant 0$, une inégalité entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.
   (b) Quelle conjecture peut-on alors formuler à propos du sens de variation des suites (α_n) et (β_n), et de leur convergence éventuelle ?
   (c) Quelle propriété semblent vérifier les suites (α_n) et (β_n) ?

Appeler l'examinateur pour lui montrer le travail réalisé sur le logiciel et pour vérifier les conjectures formulées.

☞ *L'examinateur aidera, sur certaines fonctionnalités, le candidat désirant représenter les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.*

Partie B

3. (a) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet, à partir d'une certaine valeur de n, deux solutions distinctes α_n et β_n dans des intervalles que l'on précisera.

Appeler l'examinateur pour vérification.

☞ *Le candidat pourra utiliser le tableau de variation de f_n à partir du graphique. La démonstration pourra être demandée à la fin de l'épreuve.*

   (b) Démontrer que les suites (α_n) et (β_n) sont de monotonies contraires.

Appeler l'examinateur pour vérification.

☞ *Pour aider le candidat à démarrer, l'examinateur l'amenera à utiliser les variations de la fonction f_n.*

   (c) Que peut-on en déduire ?

Appeler l'examinateur pour vérification.

☞ *On pourra éventuellement pour valoriser le candidat, lui demander de déterminer la limite commune des deux suites.*

Production demandée

- Les différentes conjectures.
- Les démonstrations détaillées des questions 3 (a) et 3 (b).

Compétences évaluées

- Savoir utiliser un logiciel de géométrie permettant de tracer des courbes de fonctions.
- Émettre des conjectures.
- Savoir utiliser le théorème de la bijection.
- Savoir utiliser les théorèmes sur les suites monotones bornées.

Suites et fonctions

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable d'utiliser un logiciel de géométrie permettant de tracer des courbes de fonctions et, avec une aide éventuelle, pour créer un « curseur ». *Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Le candidat est capable de faire des conjectures à partir de ses résultats. *Le candidat tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Le candidat montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : théorème de la bijection, théorèmes sur les suites monotones.	
Le candidat propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :