

Étude de la courbe représentative d'une fonction

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$.
Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
On se propose d'établir une propriété de la courbe \mathcal{C} .

1. (a) Représenter la courbe \mathcal{C} à l'aide d'un outil de géométrie dynamique.

☞ Pour ce sujet un logiciel de calcul formel n'est pas réellement adapté, car il amène des réponses en ordre différent de la progression prévue.

- (b) Tracer la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g = f \circ f$ puis conjecturer une expression simple de $g(x)$, pour tout x appartenant à $[0; 1]$.

Appeler l'examineur pour une vérification des constructions et de la conjecture émise.

2. (a) Placer un point M sur la courbe \mathcal{C} , puis construire le point M' symétrique de M par rapport à la droite D d'équation $y = x$.
(b) Quel semble être le lieu du point M' lorsque M décrit la courbe \mathcal{C} ?
(c) Quelle propriété de la courbe \mathcal{C} peut-on alors conjecturer ?

Appeler l'examineur pour une vérification des constructions et des observations faites.

☞ Selon le logiciel utilisé, on pourra donner des indications pour placer un point variable sur un lieu géométrique.

3. (a) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, exprimer $f \circ f(x)$ en fonction de x .
(b) En déduire la propriété de la courbe \mathcal{C} observée à la question 2.(c).

☞ On pourra guider l'élève pour retrouver les coordonnées de l'image d'un point par la réflexion d'axe D .

☞ Si un candidat a rapidement modélisé la situation géométrique et traité la suite, on pourra le mettre en situation de recherche à partir de la distance MF , où le point F a les coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, et de la distance de M à la droite Δ d'équation $y = -x$.

Production demandée

- Réalisation du graphique et construction pour observation du lieu du point M' .
- Démarche de démonstration pour les questions 3.(a) et 3.(b).

Compétences évaluées

- Représenter graphiquement une fonction à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
 - Construire un lieu géométrique.
 - Savoir déterminer l'expression d'une fonction composée.
 - Reconnaître une bijection réciproque.
-

Étude de la courbe représentative d'une fonction

Nom:**Prénom:****Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.
- La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.
- La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examineur sera globalement pris en compte de façon substantielle.

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maîtrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

<i>Compétences évaluées</i>	<i>Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examineur)</i>
<i>L'élève est capable, avec une aide éventuelle, de tracer des courbes.</i>	
<i>L'élève émet une conjecture sur l'expression de $g(x)$.</i>	
<i>L'élève est capable, avec une aide éventuelle, de construire le lieu du point M'.</i>	
<i>L'élève conjecture la propriété de la courbe \mathcal{C}.</i>	
<i>L'élève calcule l'expression de la composée de f par f en tenant compte de l'ensemble de définition.</i>	
<i>Avec d'éventuelles indications, l'élève propose une démarche de démonstration.</i>	

Remarques complémentaires :