

Suites définies conjointement

Énoncé

Soit a un nombre réel non nul. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$U_0 = a \quad \text{et} \quad V_0 = -\frac{3}{4}a$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{5}(U_n + 4V_n) \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{1}{5}(3U_n + 2V_n)$$

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, calculer et représenter graphiquement les 30 premiers termes de chacune de ces suites pour diverses valeurs du réel a .
- (b) Émettre une conjecture sur la limite de la suite (U_n) . Cette limite dépend-elle de la valeur du réel a ?
- (c) Mêmes questions pour la suite (V_n) .

Appeler l'examineur pour lui présenter les conjectures trouvées.

 *Le sujet peut être traité à l'aide de divers outils, le plus «ordinaire» est le tableur ; c'est pourquoi le terme «feuille de calcul» est employé dans l'énoncé. Si le candidat traite le sujet avec une calculatrice graphique peu avancée, il risque de rencontrer une première difficulté pour introduire le paramètre a et un problème au moment de la définition de la suite (W_n) . En effet sur la plupart des outils il convient de définir W_n en fonction de U_{n-1} et V_{n-1} . Lorsque le sujet sera donné à des élèves n'ayant pas d'autres possibilités que l'emploi de la calculatrice, ces difficultés devront être anticipées par l'enseignant.*

2. Il s'agit maintenant de conjecturer la possibilité pour la suite (U_n) d'être arithmétique ou géométrique.
 - (a) Adapter la feuille de calcul pour aider à effectuer une conjecture sur la nature de (U_n) .
 - (b) Procéder de même pour conjecturer la nature de la suite (V_n) .
 - (c) On considère la suite (W_n) définie par $W_n = 3U_n + 4V_n$. Adapter la feuille de calcul précédente pour conjecturer une propriété de la suite (W_n) .

Appeler l'examineur pour qu'il vérifie les conjectures sur la nature de chaque suite. Lui indiquer comment il est possible de démontrer la conjecture relative à la suite W_n .

 *L'examineur vérifiera la correction des conjectures, en cas d'erreur il pourra suggérer des pistes de vérification. Pour la démonstration de la constance de (W_n) une simple indication de méthode est attendue.*

Partie B

3. (a) Démontrer la conjecture relative à la suite (W_n) .
(b) En déduire U_{n+1} en fonction de U_n puis la limite de la suite (U_n) .
-

Production demandée

- La feuille ou le procédé de calcul construit permettant les conjectures des questions 1. et 2.
 - La démonstration de la question 3.(b).
-

Compétences évaluées

- Afficher, au moyen d'un tableur, les premiers termes de suites obtenues par des opérations algébriques simples sur les termes de suites déjà connues.
 - Émettre et tester des conjectures.
 - Connaître les propriétés des suites arithmétiques et géométriques.
 - Savoir étudier la convergence d'une suite.
-

Suites définies conjointement

Nom:**Prénom:****Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.
- La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.
- La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examineur sera globalement pris en compte de façon substantielle.

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maîtrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

<i>Compétences évaluées</i>	<i>Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examineur)</i>
<i>Le candidat est capable d'obtenir les termes des suites (U_n) et (V_n) pour diverses valeurs de a.</i>	
<i>Le candidat est capable d'adapter la feuille de calcul pour conjecturer la nature des suites. Il sait reconnaître que la suite (W_n) est constante.</i>	
<i>Le candidat est capable d'indiquer une méthode de démonstration de la constance de la suite (W_n).</i>	
<i>Le candidat est capable de produire la démonstration de la convergence de (U_n).</i>	

Remarques complémentaires :