

Suites, approximation d'un réel

Énoncé

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 9$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$b_n = \frac{25}{a_n^2} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$$

On se propose d'étudier la monotonie et la limite de chacune de ces deux suites.

Partie A

1. Sur un tableur, créer trois colonnes donnant les valeurs de n , de a_n et de b_n , pour n entier variant de 0 à 20.
2. En observant les résultats obtenus sur le tableur, conjecturer, pour chacune des suites (a_n) et (b_n) , la monotonie et une valeur approchée de la limite à 10^{-6} près.

Appeler l'examineur pour lui présenter les tableaux et les conjectures.

3. On considère la suite (c_n) définie, pour tout entier $n \geq 0$, par $c_n = a_n^3$.
Créer une nouvelle colonne du tableur pour calculer les termes c_n , pour n variant de 0 à 20.
Émettre alors une conjecture sur la valeur exacte de la limite de la suite (a_n) .
4. Conjecturer de même la valeur exacte de la limite de la suite (b_n) .

Appeler l'examineur

Partie B

5. On admet que, pour tout entier $n \geq 0$, $b_n^3 \leq 25 \leq a_n^3$.

Après avoir vérifié que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3}$, démontrer les résultats conjecturés à la question 2. sur la monotonie des suites (a_n) et (b_n) .

Appeler l'examineur pour lui présenter le schéma de la démonstration.

6. Citer les théorèmes qui permettent de conclure que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

Appeler l'examineur pour lui donner la réponse attendue.

7. On désigne par ℓ et ℓ' les limites respectives des suites (a_n) et (b_n) .
En utilisant les relations qui définissent ces deux suites, démontrer les résultats conjecturés aux questions 3. et 4. sur les valeurs exactes des réels ℓ et ℓ' .

Appeler l'examineur

Production demandée

- Obtention à l'écran des termes a_n , b_n et c_n , pour n entier variant de 0 à 20.
- Conjecture sur les valeurs exactes des limites des suites (a_n) et (b_n) .
- Démarches et réponses argumentées aux questions 5. et 7.