Suites, approximation d'un réel

Énoncé

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 9$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$b_n = \frac{25}{a_n^2} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$$

On se propose d'étudier la monotonie et la limite de chacune de ces deux suites.

Partie A

1. Sur un tableur, créer trois colonnes donnant les valeurs de n, de a_n et de b_n, pour n entier variant de 0 à 20.
2. En observant les résultats obtenus sur le tableur, conjecturer, pour chacune des suites (a_n) et (b_n), la monotonie et une valeur approchée de la limite à 10^{-6} près.

Appeler l'examinateur pour lui présenter les tableaux et les conjectures.

☞ *Pour les questions 1. et 2., on attend que l'élève ait calculé à l'aide du tableur les valeurs de a_n et de b_n, pour n variant de 0 à 20.*
Le candidat a émis les conjectures sur la monotonie de chacune des suites et sur leur limite.
On pourra valoriser le candidat s'il remarque que les deux suites semblent adjacentes.

3. On considère la suite (c_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 0$, par $c_n = a_n^3$.
Créer une nouvelle colonne du tableur pour calculer les termes c_n, pour n variant de 0 à 20.
Émettre alors une conjecture sur la valeur exacte de la limite de la suite (a_n).
4. Conjecturer de même la valeur exacte de la limite de la suite (b_n).

Appeler l'examinateur

☞ *Pour les questions 3. et 4., le candidat doit pouvoir conjecturer que les suites de terme général a_n^3 et b_n^3 convergent toutes les deux vers le même réel, puis en déduire que la valeur exacte de la limite commune des suites (a_n) et (b_n).*

Partie B

5. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $b_n^3 \leqslant 25 \leqslant a_n^3$.

☞ *Ces inégalités sont admises afin d'alléger la partie mathématique du sujet et de la rendre réalisable dans le temps imparti à l'épreuve.*

Après avoir vérifié que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{3}$, démontrer les résultats conjecturés à la question 2. sur la monotonie des suites (a_n) et (b_n).

Appeler l'examinateur pour lui présenter le schéma de la démonstration.

☞ *On pourra proposer au candidat d'utiliser les variations de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{25}{x^2}$ *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$.
Le candidat peut aussi conclure à l'aide d'inégalités.

6. Citer les théorèmes qui permettent de conclure que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

   Appeler l'examinateur pour lui donner la réponse attendue.

   ☞ *On attend le théorème.*

7. On désigne par ℓ et ℓ' les limites respectives des suites (a_n) et (b_n).
   En utilisant les relations qui définissent ces deux suites, démontrer les résultats conjecturés aux questions 3. et 4. sur les valeurs exactes des réels ℓ et ℓ'.

   Appeler l'examinateur

   ☞ *On attend que soit justifiées les égalités, puis finalement* $\ell = \ell' = 25^{1/3}$.

Production demandée

- Obtention à l'écran des termes a_n, b_n et c_n, pour n entier variant de 0 à 20.
- Conjecture sur les valeurs exactes des limites des suites (a_n) et (b_n).
- Démarches et réponses argumentées aux questions 5. et 7.

Compétences évaluées

- Utiliser un tableur pour étudier des suites définies par récurrence.
- Émettre et tester des conjectures.
- Étudier les variations d'une suite.
- Déterminer la limite d'une suite.

Suites, approximation d'un réel

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable, avec une aide éventuelle, de construire une feuille de calcul permettant de calculer les premiers termes des suites (a_n) et (b_n).	
Le candidat est capable de compléter la feuille de calcul pour calculer les premiers termes de la suite (c_n) .	
Le candidat est capable d'initiative pour considérer la suite (b_n^3).	
Le candidat est capable d'émettre des conjectures à partir des résultats observés.	
Le candidat tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
Le candidat montre un certain nombre de connaissances sur le sujet : variation de suite, limite de suite ...	
Le candidat propose une résolution correcte de l'exercice, en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :