

Limites d'intégrales

Énoncé

Pour un entier naturel n non nul, on considère le nombre I_n défini par l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

On cherche à déterminer la limite éventuelle de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

☞ Les logiciels de calcul formel permettent d'obtenir immédiatement la valeur exacte de I_n et la limite de la suite (I_n) . Le travail relatif à l'étude des fonctions f_n garde cependant tout son sens. Au cas où un candidat emploie ces outils, l'examineur s'efforcera de vérifier que le candidat fait bien le lien entre l'allure de la famille de courbes et la limite obtenue à l'aide du logiciel.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, tracer la courbe représentative de la fonction

$$f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

2. Faire varier n . Quand n devient très grand, quelle est l'allure de la courbe représentative de f_n ?
3. Essayer alors de conjecturer une valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Appeler l'examineur pour présenter la conjecture.

☞ De très nombreux logiciels peuvent être utilisés pour ce travail graphique. Suivant les outils utilisés on pourra obtenir une courbe dynamique ou une famille de courbes. L'examineur s'attachera à vérifier que le candidat songe à associer la suite (I_n) à des aires et qu'il utilise au mieux les possibilités du logiciel pour avoir une idée de la limite. Le fait que le candidat songe à faire tracer la courbe représentative de l'exponentielle sera valorisé.

Partie B

4. Calculer une primitive de f_n sur $[0; 1]$ et en déduire la valeur exacte de I_n .

Appeler l'examineur pour une vérification.

☞ Pour cette question, l'examineur vérifiera qu'un candidat utilisant un système de calcul formel sait faire le lien entre intégrale et primitive et sait exploiter correctement le logiciel qu'il emploie.

5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

☞ On attend ici une justification du résultat donné, donc l'usage d'un système de calcul formel est sans incidence.

6. En déduire la valeur exacte de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Production demandée

- Les représentations graphiques de la question 1.
 - La rédaction des questions 5. et 6.
-

Compétences évaluées

- Représenter graphiquement une famille de fonctions.
 - Donner une estimation d'une aire à l'aide du logiciel utilisé.
 - Calculer l'intégrale d'une fonction.
 - Calculer une limite de suite.
-